**Лабораторная работа №4******

**Численные методы. Одномерная минимизация**

Под оптимизацией понимают нахождение минимального значения (минимизация) или максимального значения (максимизация). Функция, которая подвергается воздействию процессов оптимизации, как максимизации таки и минимизации называется целевой функцией.

Задачи оптимизации классифицируются в соответствии с количеством варьируемых скалярных параметров. Когда варьируется один скалярный параметр возникает задача одномерной оптимизации. В другом случае, когда число варьируемых параметров

Глобальный минимум функции F – это точка X, для которой справедливо утверждение, что значение функции F в любой другой точке области определения функции F не превосходят значение функции F в точке X.

Локальный минимум функции F – это точка X, в окрестности которой значения функции F не превосходят значение функции F в точке X.

Подобно алгоритмам решения трансцендентных уравнений, решение задачи одномерной минимизации начинается с процесса локализации одного изолированного решения. В последствие производится уточнение изолированного решения до требуемой точности одним из методов. В случае одномерной задачи для локализации изолированного решения можно воспользоваться табулированием функции с некоторым шагом.

Унимодальная функция *–* это функция определенная на некотором интервале [a,b] и содержащая на нем единственный локальный минимум.

Некоторые методы минимизации имеют в своей основе сравнение значений функции в некоторых точках. Такие методы относятся к *методам прямого поиска*, а точки, в которых происходит сравнение называют *пробитыми*.

**Монотонность функции***.* Функция *f(x)* является монотонной на интервале, если для любых *x1* и *x*2 из этого интервала, таких, что *x1*< *x2* выполняется неравенство *f(x1)<f(x2)*, если функция монотонно возрастающая или *f(x1)>f(x2)*, если функция монотонно убывающая.

Если функция f (x) не унимодальна, то наименьший из локальных минимумов будет глобальным минимумом (аналогично – наибольший из локальных максимумов будет глобальным максимумом). Для нахождения аналитического оптимума необходимо найти стационарные или критические точки функции, использовать какое-либо из достаточных условий экстремума (изменение знака первой производной или определенного знака четной производной) и сравнить значения функции в точках локальных экстремумов и граничных значениях

Методы одномерной оптимизации разделяются на подклассы по следующим принципам:

* использование в процессе поиска экстремума информации о самой функции, так как в ряде задач целевая функция задана таким образом, что точных значений производных найти нельзя (только оценить).
* использование в процессе поиска экстремума информации о самой функции или ее производных. − по виду целевой функции (методы решения одно- и многоэкстремальных задач).

**Метод равномерного поиска**

Метод равномерного поиска (метод перебора, пассивного поиска) является одним из простейших методов нахождения минимума функции одной переменной. Пусть необходимо отыскать минимум фунции ***f(x)*** на отрезке [a, b]. Зададимся некоторым числом ***n*** называемым количеством наблюдений. Разобьем интервал [a, b] на ***n+1*** равных частей. Точки деления интервала можно вычислить по формуле.



Далее вычислим значение функции ***f(x)*** в каждой точке деления интервала [a, b]. Выбирая из всех рассчитанных в точках деления интервала значений функции f(x) наименьшее, получим оценку минимума функции.

Интервал неопределенности в данном случае составит величину.



Погрешность определения минимума функции составляет ровно половину длины неопределенности.

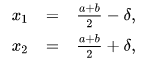


**Метод половинного деления**

Метод половинного деления относится к классу так называемых методов последовательного поиска, когда для решения задачи последовательно рассчитываются значения функции в некотором количестве пробных точек, причем для определения каждой следующей точки используется информация о значениях функции во всех остальных.

Метод дихотомии (половинного деления) используется при решение нелинейных уравнений. Он так же применим к задаче минимизации функции одной переменной. На первом этапе нужно грубо определить участок поиска минимума функции. Для этой цели вполне применим метод схожий с методом равномерного поиска, когда исследуемая область функции разделяется на некоторое количество отрезков и путем сравнения значений функции на их границах определяется интервал [a, b] для уточнения положения минимума функции.

Далее на отрезке [a, b] вычисляются точки x1 и x2 по следующим зависимостям:



Величина δ определяется как некоторое число в диапазоне  . Таким образом, сравнивая значения функии в точках x1 и x2 принимается решение о том какой из интервалов отбрасывается. Если , то в рассмотрении остается отрезок [x1,b], а отрезок [a,x1] исключается. В противном случае оставляем отрезок [a, x2], [x2, b] отбрасываем.

Итерационный процесс длится до тех пор, пока длина отрезка [a, b] не станет меньше либо равна допустимой погрешности вычисления.

**Метод Фибоначчи**

Следует отметить, что при использовании метода половинного деления нам приходится на каждом этапе вычисления рассчитывать два новых значения функции, в виду того, что те значения, которые были определены на предыдущей итерации более не используются. Однако, одна из этих ранее рассчитанных точек является внутренней для оставленного в расчете интервала. Основываясь на этом, можно заключить, что на следующей итерации можно производить лишь одно вычисление функции в новой точке. Это заключение лежит в основе методов минимизации, которые вычисляют одну новую точку на каждой новой итерации. Рассмотрим наиболее популярные из них: метод Фибоначчи и метод золотого сечения. Метод Фибоначчи имеет в своей основе одноименную последовательность чисел, описываемую рекуррентным соотношением.

*Fn = Fn-1 + Fn-2*, при n больше либо равным 2

*F0 = 1, F1 = 1*

По окончании выполнения N-1 шагов отрезок поиска корня будет уменьшен в FN+1/2 раз, а точка ответа является серединой последнего отрезка локализации.

**Метод золотого сечения**

Развитием метода дихотомии является метод «золотого сечения», когда исследуемый отрезок делится на две неравные части. Известно, что золотым сечением отрезка является такое разделение на две неравные части, при котором отношение длины всего отрезка к длине его большей части равно отношению длины большей части к длине меньшей части отрезка. В случае использования метода «золотого сечения» величина δ – смещения точек x1 и x2 от середины отрезка [a, b] вычисляется с использованием следующих соотношений.

,

где Ф = 1,6180339887 – коэффициент золотого сечения

***Практическое задание***

Найти минимум функции в соответствии с вариантом.

Реализовать 3 метода поиска минимума (метод половинного деления, метод Фибоначчи, метод золотого сечения) и провести сравнение методов одномерной минимизации. Локализовать и уточнить первый не равный бесконечности минимум функции в положительной области оси X в соответствии с индивидуальным заданием. Предусмотреть выбор метода решения, точности и результата расчета.

Таблица 1. Варианты заданий

|  |  |
| --- | --- |
| №  варианта | Уравнение |
|  | y(x)=sin(x)ln(x) |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |